

پیراحاصلضرب چیست؟

مژده شیرانی راد

چکیده. پیراحاصلضربها در مسیر پیدایش عملگرهای پیرادیفرانسیل پذیر به وجود آمدند، که این نظریه خود نقطه عطفی در نظریه عملگرهای شبه دیفرانسیلی است، آنچه از نام پیراحاصلضرب انتظار می رود وجود خواصی به مراتب بیشتر از خواص ضرب معمولی است. پیراحاصلضربها از زمان پیدایش خود در سال ۱۹۶۵ نقش محوری در آنالیز و معادلات دیفرانسیل جزئی بازی کرده اند این مفاهیم با نظریه دوخطی کالدرن-زیگموند ارتباط دارد و زیر بنای بسیاری از عملگرهای دوخطی دیگر را تشکیل می دهند. اگر بخواهیم برخی از کاربردهای آنها را نام ببریم می توان به قضیه های مشهور T_1 ، T_b کرانداری جابه جاگرهای کالدرن، تبدیل دوخطی هیلبرت، نظریه های ضرایب نقطه ای فضاها تابعی و نظریه فشردگی تصحیح شده اشاره کرد.

۱. مقدمه

اصطلاح پیراحاصلضرب^۱ امروزه در مقالات برای نشان دادن یک عملگر دوخطی استفاده می شود و با وجود این که ناجابه جایی^۲ است تا حدودی از ضرب معمولی توابع خوش رفتارتر است.

۲. پیراحاصلضرب چیست؟

پیراحاصلضربها اولین بار در نظریه عملگرهای پیرا دیفرانسیل پذیر^۳ بانی^۴ ظهور پیدا کردند [۱]. این نظریه نقطه عطفی در نظریه عملگرهای شبه دیفرانسیلی^۵ بود که کافمن^۶ و میر^۷ در [۳] از پیشگامان آن بودند. کلمه یونانی $\pi\alpha\rho\alpha$ (para) در زبان انگلیسی به «پیرا»^۸ و در فرانسه، دقیقاً مانند تیترا مقاله ی [۳]، به au delà ترجمه شده است. بنابراین خواص تعریف کننده ی یک پیراحاصلضرب باید ویرای خواص مطلوب ضرب باشد. به عنوان اولین گام و برای نشان دادن این ویژگی ها عملگر دوخطی زیر را در نظر می گیریم

$$\Pi_0(f, g)(s) = \int_{-\infty}^s f'(t)g(t)dt \quad f, g \in C_0^1(\mathbb{R}).$$

با استفاده از قاعده ی لیب-نیتز^۹ داریم

$$fg = \Pi_0(f, g) + \Pi_0(g, f)$$

عبارات و کلمات کلیدی. پیراحاصلضرب، عملگر دوخطی، قاعده ی لیب-نیتز-گونه، نامساوی هولدر-گون.
تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۱/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱۰/۰۲.

¹ Paraproduct ² Noncommutative ³ Paradifferential Operators ⁴ J.-M. Bony ⁵ Beyond Pseudodifferential Operators ⁶ R. R. Coifman ⁷ Y. Meyer ⁸ Beyond ⁹ Leibniz's rule

که در آن Π_0 ، ضرب fg را بازسازی^{۱۰} می‌کند، به علاوه Π_0 یک فرمول خطی سازی دقیق فراهم می‌کند، به این صورت که اگر $H \in C^\infty(\mathbb{R})$ آنگاه

$$H(f) = H(\circ) + \Pi_0(f, H'(f))$$

این ویژگی مشابه خاصیت

$$H(f) = H(\circ) + fH'(f) + error$$

برای ضرب معمولی است. همچنین Π_0 در قاعده‌ی لیب-نیتز گونه‌ی^{۱۱}

$$\Pi_0(f, g)' = f'g$$

صدق می‌کند، اما در یکی از خواص اصلی ضرب صدق نمی‌کند و این خاصیت همان نامساوی هولدر^{۱۲} است. پس پیرا حاصلضرب چیست؟، عملگر Π دوخطی و غیرجابجایی که در بازسازی ضرب، فرمول‌های خطی سازی (با خطای هموار)، یک نابرابری هولدر-گونه^{۱۳} و یک قاعده‌ی لیب-نیتز گونه صدق می‌کند، قاعده‌ی لیب-نیتز گونه به صورت

$$\partial^\alpha \Pi(f, g) = \tilde{\Pi}(\partial^\alpha f, g)$$

است که در آن $\tilde{\Pi}$ در نامساوی هولدر-گونه صدق می‌کند. برای Π_0 وقتی $\alpha = 1$ باشد، $\tilde{\Pi}(f, g) = fg$ است. Π_0 به پیرا حاصلضرب بودن نزدیک است اما برای فضاهای L^p مناسب نیست چون در نامساوی هولدر صدق نمی‌کند. حال توجه خود را به سیر تکاملی شکل‌های مختلف پیرا حاصلضرب‌ها معطوف می‌کنیم. هر یک از پیرا حاصلضرب‌های Π_l در زیر در زمان مناسب به Π_{l+1} تبدیل شده است و انگیزه‌ی این کار نیاز آنالیزدانان به حل مسائل مشخصی بوده است.

با نگاهی به گذشته، نسخه‌ی اولیه‌ی پیرا حاصلضرب به طور ضمنی در کار کالدرون^{۱۴} در مورد جابه‌جاها بیان شده است [۲]. اگر $U = \{s + it : s \in \mathbb{R}, t > 0\}$ و $1 < p, q < \infty$ ، برای $F \in H^p(U)$ و $G \in H^q(U)$ (فضاهای هاردی)^{۱۵} کالدرون، عملگر دوخطی

$$\Pi_1(F, G)(s) = -i \int_0^\infty F'(s + it)G(s + it)dt$$

را تعریف کرد. مجدداً با استفاده از قاعده‌ی لیب نیتز، Π_1 ضرب FG (روی خط حقیقی) را بازسازی می‌کند. مشتق Π_1 از قاعده‌ی لیب نیتز تبعیت می‌کند (همان طور که ضرب، نیز از آن تبعیت می‌کند)، Π_1 در یک فرمول خطی سازی صدق می‌کند و نیز کالدرون نشان داد که Π_1 در نامساوی هولدر-گونه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$1/r = 1/p + 1/q$$

$$\|\Pi_1(F, G)\|_{L^r(\mathbb{R})} \lesssim \|F\|_{H^p(U)} \|G\|_{H^q(U)}.$$

حال می‌خواهیم Π_1 را «تحلیل»^{۱۶} کنیم. f_1 و f_2 را به ترتیب مقادیر مرزی حقیقی و موهومی F تعریف می‌کنیم،

یعنی

$$F(s + it) = (f_1 * p_t)(s) + i(f_2 * p_t)(s)$$

¹⁰ Reconstructs ¹¹ Leibniz-type rule ¹² Hölder's inequality ¹³ Hölder-type inequality ¹⁴ A. P. Calderón ¹⁵ Hardy spaces

¹⁶ Deconstruct

که در آن $p_t(\chi) = t^{-1}p(t^{-1}\chi)$ گشادگی^{۱۷}،^{۱۸} از هسته‌ی پواسون^{۱۹} $p(\chi) = \pi^{-1}(1 + \chi^2)^{-1}$ است. $Q = p'$ قرار می‌دهیم و با مشتق‌گیری داریم

$$F'(s + it) = \frac{1}{t}(f_1 * Q_t)(s) + i \frac{1}{t}(f_2 * Q_t)(s).$$

به‌طور مشابه اگر G را برحسب مقادیر مرزی آن بنویسیم می‌بینیم که $\Pi_1(F, G)(s)$ را می‌توان به صورت مجموع چهار عملگر به شکل،

$$\Pi_2(f, g)(s) = \int_0^\infty (Q_t * f)(s)(p_t * g)(s) \frac{dt}{t}$$

بیان کرد. در n -بعد و بر پایه‌ی یک رهیافت متغیر-حقیقی^{۲۰}، بانی [۱] عملگرهای دوخطی به شکل

$$\Pi_3(f, g) = \int_0^\infty (\psi_t * f)(s)(\phi_t * g)(s) \frac{dt}{t},$$

را در نظر گرفت. مشابه Π_2 ، $\phi_t(\chi) = t^{-n}\phi(\chi \setminus t)$ و $\psi_t(\chi) = t^{-n}\psi(\chi \setminus t)$ یک تابع شوارتز^{۲۱} در \mathbb{R}^n است به طوری که تبدیل^{۲۲}،^{۲۳} فوریه‌ی آن، $\hat{\phi}$ ، حقیقی، متقارن شعاعی و متکی^{۲۴} در گوی $\mathbb{B}_1(\circ)$ است و در $\mathbb{B}_p(\circ)$ داریم $\hat{\phi} = 1$. ψ نیز (در سمت فوریه) به صورت

$$\hat{\psi}(\xi) = \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) - \hat{\phi}(\xi)$$

تعریف می‌شود. نسخه‌ی گسسته‌ی Π_3 ($t = 2^{-j}$) به صورت

$$\Pi_4(f, g) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\psi_j * f)(\phi_j * g),$$

درمی‌آید که در آن $\psi_j(\chi) = 2^{jn}\psi(2^j\chi)$ و $\phi_j(\chi) = 2^{jn}\phi(2^j\chi)$. با استفاده از خواص ψ تساوی

$$\begin{aligned} fg &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\psi_j * f)(\psi_k * g) \\ &= \Pi_4(f, g) + \Pi_4(g, f) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\psi_j * f)(\psi_j * g), \end{aligned}$$

را نتیجه می‌گیریم که این تساوی یک فرمول بازسازی ضرب به همراه یک جمله‌ی خطا است. یک تصحیح^{۲۵} مناسب برای Π_4 به شکل

$$\Pi_5(f, g) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\psi_j * f)(\phi_{j-2} * g)$$

که در نتیجه

$$fg = \Pi_5(f, g) + \Pi_5(g, f) + R(f, g)$$

^{۱۷} گونه‌ای انتقال است که اندازه‌ی تصویر را تغییر می‌دهد.
^{۱۸} یعنی بخش‌های مشابهی دارند که از مرکز پراکنده شده‌اند.

¹⁸Dilation ¹⁹ Poisson kernel ²⁰ Real-Variable Approach ²¹ Schwarz function ²²Radially Symmetric ²⁴ Supported
²⁵ Modification

در این عبارت $R(f, g)$ جمع سه قطری^{۲۶} در $|j - k| \leq 1$ است. عملگر Π_Δ که آن را پیراحاصلضرب بانی^{۲۷} می‌نامند، ویژگی‌های برجسته‌ای دارد. همان طور که اتحاد آخر نشان می‌دهد یک فرمول بازسازی برای ضرب به همراه یک جمله‌ی خطا وجود دارد. حال سؤال این است، با وجود اینکه این فرمول یک بازسازی دقیق نیست پس چرا این قدر مفید است؟ فرض کنیم $f \in C^\alpha$ و $g \in C^\beta$ (فضاهای هولدر) با $0 < \alpha < \beta$ باشد. از آنجا که یک ضرب به همواری تقریبی‌ترین فاکتور خود است داریم، $fg \in C^\alpha$ اما بانی نشان داد که $\Pi_\Delta(f, g) \in C^\beta$ و $\Pi_\Delta(g, f) \in C^\alpha$ و $R(f, g) \in C^{\alpha+\beta}$ است. بنابراین با این کار قسمت‌های بد، خوب و بهترین قسمت fg را مشخص کرد. به علاوه، برای $H \in C^\infty(\mathbb{R})$ داریم $\Pi_\Delta H$ را در تابع f خطی می‌کند به طوری که

$$H(f) = H(0) + \Pi_\Delta(f, H'(f)) + e_H(f),$$

که در آن خطای $e_H(f)$ از f هموارتر است. مزیت دیگر آن است که، همان طور که محاسبات مستقیم روی قسمت فوریه‌ی Π_Δ نشان می‌دهد، Π_Δ را می‌توان به شکل

$$\Pi_\Delta(f, g) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Psi_j * ((\psi_j * f)(\phi_{j-2} * g)),$$

نوشت که Π_Δ در یک طوقه‌ی مناسب متکی شده است. خواننده‌ی تیزبین به این نکته توجه خواهد کرد که این خاصیت برای Π_Δ ممکن نیست و به همین دلیل Π_Δ معرفی شده است. فرض کنیم $\langle \cdot, \cdot \rangle$ نشان‌دهنده‌ی دوگان تابع-گونه‌ی توزیع شوارتز^{۲۸} معمولی باشد و h تابع شوارتز دیگری باشد آنگاه

$$\langle \Pi_\Delta(f, g), h \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle (\psi_j * f)(\phi_{j-2} * g), \Psi_j * h \rangle,$$

و این رابطه امکان دسترسی فوری به قسمت‌های لیتل وود-پالی^{۲۹} h را فراهم می‌کند. خواص نگاشت برای Π_Δ ، از جمله خواص هولدر-گونه‌ی $L^p \times L^q \rightarrow L^r$ توسط دوگانگی به دست می‌آید. برای آنکه در عمل خواص بیشتری از پیراحاصلضرب را ببینیم قاعده‌ی جزئی لیب نیتز کلاسیک را ثابت می‌کنیم. این قاعده بیان می‌دارد که

$$\|D^\alpha(fg)\|_{L^r} \lesssim \|D^\alpha f\|_{L^{p_1}} \|g\|_{L^{q_1}} + \|f\|_{L^{p_2}} \|D^\alpha g\|_{L^{q_2}},$$

که در آن برای $0 < \alpha$ داریم $D^\alpha h(\xi) = |\xi|^\alpha \hat{h}(\xi)$ و نیز برای $1 < p_1, p_2, q_1, q_2 < \infty$ داریم $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2}$. بحث کوتاهی که در ادامه می‌آید (به عنوان مثال موسکالا^{۳۰}، پیپیر^{۳۱}، تائو^{۳۲}، و تایل^{۳۳})، (۲۰۰۴) را ببینید) از بازسازی حاصلضرب و قاعده‌ی لیب نیتز برای پیراحاصلضرب‌ها استفاده می‌کند:

$$\begin{aligned} \|D^\alpha(fg)\|_{L^r} &= \|D^\alpha(\Pi(f, g) + D^\alpha(\Pi(g, f)))\|_{L^r} \\ &= \|\tilde{\Pi}(D^\alpha f, g) + \tilde{\Pi}(D^\alpha g, f)\|_{L^r} \\ &\lesssim \|D^\alpha f\|_{L^{p_1}} \|g\|_{L^{q_1}} + \|f\|_{L^{p_2}} \|D^\alpha g\|_{L^{q_2}} \end{aligned}$$

وقتی رابطه‌ی زیر را در نظر بگیریم نسخه‌ی انعطاف‌پذیرتر Π_Δ برای توابع عمومی ϕ^m ، $m = 1, 2, 3$ ، حاصل خواهد شد

$$\Pi_\Delta(f, g) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j^1 * ((\phi_j^2 * f)(\phi_j^2 * g)),$$

²⁶ Tridiagonal Sum ²⁷ Bony's paraproduct ²⁸ Schwarz function-tempered distribution dual pairing ²⁹ Littlewood-Paley

³⁰ Muscalu ³¹ Pipher ³² Tao ³³ Thiele

به عنوان مثال برای توابع ϕ^m مناسب، $\tilde{\Pi}_D = \Pi_D$ است. به نوبه‌ی خود Π_D به صورت زیر تحول یافته^{۳۴} است. اگر Q یک مکعب دوتایی^{۳۵} باشد می‌نویسیم، $Q \in D$ یعنی

$$Q = \{\chi \in \mathbb{R}^n : k_i \leq 2^j \chi_j \leq k_i + 1; i = 1, \dots, n\}, \quad k \in \mathbb{Z}^n, j \in \mathbb{Z}$$

در این مورد می‌نویسیم $Q = Q_{jk}$. همچنین $\chi_Q = 2^{-j}k$ نمایانگر گوشه‌ی سمت چپ پایین Q است. محاسبات ساده نشان می‌دهد که Π_D را می‌توان به صورت

$$\Pi_D(f, g)(\chi) = \int \int K(\chi, y, z) f(y) g(z) dy dz,$$

نوشت که $K(\chi, y, z)$ هسته‌ی دوخطی است و به صورت زیر داده می‌شود:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} |Q_{jk}|^{-\frac{1}{p}} - \int_{Q_{jk}} \phi_{j,\chi}^1(w) \phi_{j,y}^2(w) \phi_{j,z}^3(w) dw,$$

که در آن

$$\phi_{j,\chi}^m(w) = 2^{\frac{jm}{p}} \phi^m(2^j(\chi - w)), m = 1, 2, 3$$

اگر میانگین فوق را با مقدار انتگرالده در χ_Q جایگزین کنیم، می‌توانیم هسته را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\sum_Q |Q|^{-\frac{1}{p}} \phi_Q^1(\chi) \phi_Q^2(y) \phi_Q^3(z) + E(\chi, y, z),$$

که در آن

$$\phi_Q^m(\chi) = \phi_{j,\chi}^m(\chi_Q), m = 1, 2, 3$$

و خطای $E(\chi, y, z)$ هسته‌ی دوخطی یک عملگر هموار کننده^{۳۶} است. توابع ϕ_Q^m مثال‌های به اصطلاح «مولکول‌های متناظر»^{۳۷} به یک مکعب Q است. برای خانواده‌ی کلی از مولکول‌های ϕ_Q^m ، $m = 1, 2, 3$ که لزوماً گشاده نیستند و یا انتقال یک برش عرضی^{۳۸} ثابت نبوده است اما، خواص حذف^{۳۹} مناسبی دارند پیراحاصلضرب مولکولی مربوطه‌ی Π_V دارای هسته‌ی زیر است:

$$\sum_{Q \in D} |Q|^{-\frac{1}{p}} \phi_Q^1(\chi) \phi_Q^2(y) \phi_Q^3(z),$$

یعنی

$$\Pi_V(f, g)(\chi) = \sum_{Q \in D} |Q|^{-\frac{1}{p}} \langle \phi_Q^1, f \rangle \langle \phi_Q^2, g \rangle \phi_Q^3(\chi).$$

Π_V نشان‌دهنده‌ی یکی از نمونه‌های مدرن پیراحاصلضرب‌ها است. مولکول‌هایی که براساس سیستم هار^{۴۰} هستند، پیراحاصلضرب‌هایی را نتیجه می‌دهند که به آنها پیراحاصلضرب‌های دوتایی^{۴۱} گویند. پیراحاصلضرب‌ها از زمان پیدایش خود در سال ۱۹۶۵ نقش محوری در آنالیز و معادلات دیفرانسیل جزئی بازی کرده اند این مفاهیم با نظریه‌ی دوخطی کالدرون-زیگموند^{۴۲} ارتباط دارد و زیر بنای بسیاری از عملگرهای دوخطی دیگر را تشکیل می‌دهند. اگر بخواهیم برخی از کاربردهای آنها را نام ببریم می‌توان به قضیه‌های مشهور Tb ، $T1$ ، کرانداری جابه‌جاگرهای کالدرون، تبدیل دوخطی هیلبرت، نظریه‌های ضرایب نقطه‌ای فضاهای تابعی و نظریه‌ی فشردگی تصحیح شده اشاره کرد.

^{۳۴} مجموعه‌ی مکعب‌هایی در \mathbb{R}^n ، که از اندازه‌ها و سایزهای مختلف‌اند و مجموعه‌ی مکعب‌های هر اندازه، \mathbb{R}^{2n} را تقسیم‌بندی می‌کند و هر مکعب در یک اندازه را می‌توان به صورت اجتماع مکعب‌های با اندازه‌های کوچکتر نوشت.

^{۳۵} Dyadic Cube ^{۳۶} Smoothing Operator ^{۳۷} Molecules associated ^{۳۸} Profile ^{۳۹} Cancellation ^{۴۰} Haar ^{۴۱} Dyadic Paraproducts

^{۴۲} Calderón-Zygmund

مراجع

- [1] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14 (1981) 209-249.
- [2] A. P. Calderón, Commutators of singular integral operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 53 (1965) 1092-1099.
- [3] R. R. Coifman and Y. Meyer, Au delà des opérateurs pseudo-différentiels, *Société Mathématique de France*, 57 (1978).

مژده شیرانی راد

اصفهان، خیابان هزار جریب، دانشگاه اصفهان، گروه ریاضی

mozhdeh.shirani@gmail.com

مژده شیرانی راد متولد شهر اصفهان است. وی مقطع کارشناسی، رشته ریاضی محض را در دانشگاه کاشان و مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز تابعی را در دانشگاه اصفهان گذراند. پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد او در سال ۱۳۹۲ تحت نظر آقای دکتر مجید فخار و آقای دکتر مهدی چینایی انجام پذیرفت.

