

جایگاه شهود در آموزش ریاضیات

علی پارسیان

چکیده. بر اساس نظر تعدادی از دانشمندان و تاریخ‌نگاران علم، شهود و بصیرت ریاضیدانان بازیگر اصلی میدان اکتشاف آنان است. نمونه‌هایی از این مکتوبات را می‌توان در آثار برخی از ریاضیدانان بزرگ یافت. هدف این نوشتار، کنکاش بیشتر موضوع، در آثار و اقوال ریاضیدانان و آنگاه بررسی جایگاه شهود در آموزش ریاضیات است.

۱. مقدمه

آنچه که در وهله اول از آن به شهود ریاضیدان تعبیر می‌کنیم فرآیندی است که در قوه ذهنی او ایجاد می‌شود تا به اکتشافی بیانجامد. هرچند، کاربرد واژه کشف که مؤید یک هستی، پدیده یا قانونی است که از قبل وجود داشته ولی ناشناخته بوده است، به دلیل تردیدی که در خواننده در مورد جای مکشوف ایجاد می‌کند، شاید محل درنگ باشد. به علاوه، چنین پژوهش‌هایی در معرض خطایی است که به ندرت می‌توان از آن دوری کرد. چه کسی را می‌توان یک ریاضیدان به شمار آورد، به ویژه ریاضیدانی که فرآیندهای ذهنی او درخور توجه باشد؟ نکته دیگری که نباید از آن غفلت کرد تفاوت‌هایی که در ذهن‌های ریاضیدانان وجود دارد. بعضی از آنان یک نظریه را به صورت زیبایی بنا می‌نهند و گروه دیگر سرانجام کاربردهای ساده آن را مورد استفاده قرار می‌دهند و در به دست آوردن چیزی بیش از یک دانش ابتدایی از آن احساس ناتوانی می‌کنند. با این وجود، درباره شهود بررسی‌های زیادی انجام گرفته و نتایج نسبتاً فراوانی به دست آمده است، گرچه هنوز رازهای بسیاری نیز ناگشوده باقی مانده‌اند. دشواری موضوع، گسترده‌تر و منسجم‌تر از چیزی است که بتوان از ماهیت اسرارآمیز آن انتظار داشت. این دانش، آمیخته‌ای از دو رشته روان‌شناسی و ریاضیات است و شایسته است کسانی به آن پردازند که هم ریاضیدان و هم روان‌شناس باشند. به علت فقدان این ترکیب، موضوع از یک سو توسط ریاضیدانان و از سوی دیگر توسط روان‌شناسان بررسی شده است. در برخی از این بررسی‌ها اطلاعات مربوط به شیوه‌های اندیشه، مستقیماً از خود متفکر و بررسی‌کننده گرفته شده است. به این ترتیب که او با درون‌نگری، فرآیندهای ذهنی خود را گزارش کرده است. کاستی آشکار این روش آن است که مشاهده‌گر ممکن است در هنگام مشاهده پدیده، همان پدیده را آشفته سازد. در گونه‌ای دیگر، مشاهده‌گر از متفکر جدا است و مشاهده و فکر در یکدیگر تداخل نمی‌کنند. در این روش، که برون‌نگر است، اطلاعات غیرمستقیم به دست می‌آید و مفاهیم آن به آسانی و درستی قابل بررسی نیستند. از دلایل عمده دشواری کاربرد این روش‌ها آن است که استفاده از آنها مستلزم مثال‌های گوناگون است تا بتوان به کمک آن‌ها به «یک واقعیت» دست یافت.

عبارات و کلمات کلیدی. روان‌شناسی، ریاضیات، شهود.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۳/۰۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۹/۱۴

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2017.21616>

ردپای شهود در آثار و نوشته‌های برخی از ریاضیدانان و محاسبه‌گران دیده می‌شود. وقتی لایب‌نیتز^۱ توفیقی در یافتن نظری قاطع در مورد ماهیت و درجه یقین حسابان نمی‌یابد دلیل پذیرش آن را در این نکته خلاصه می‌کند که در عمل به نتایج درست میانجامد [۱۲]. در همان دوران، وایرستراس^۲ به دوست ریاضیدان خود می‌نویسد که برای ریاضیدان به عنوان مکتشف استفاده از هر روشی جایز است [۷]. شاید صریح‌ترین شهادت، در نامه‌ای باشد که یکی از محاسبه‌گران به نام فرول^۳، برای موبیوس^۴ نوشته است: «اگر از من پرسشی می‌شد که نسبتاً دشوار بود احساس من بی‌درنگ نتیجه را می‌یافت بی‌آنکه لحظه اول بدانم چگونه آن را به دست آورده‌ام» [۱].

۲. شهود در ادبیات ریاضی

روان‌شناسان و ریاضیدانان بسیاری درباره شهود اندیشیده‌اند. بررسی‌ها گاهی درون‌نگر و زمانی نیز برون‌نگر بوده است. به اعتقاد رفتارگرایان جدید، بین روان‌شناسی درون‌نگر و روان‌شناسی برون‌نگر تمایز وجود دارد. اما آدامار^۵ ضمن نقل همین مطلب از امکان استفاده از هر دو روش و نتایج آنها در فرآیندهای روان‌شناختی سخن می‌گوید. او می‌نویسد: «بعضی از ریاضیدان‌ها شهودی و گروهی منطقی هستند». پوانکاره^۶ و کلاین^۷ به این تمایز پرداخته‌اند. سخنرانی پوانکاره درباره این موضوع به شرح زیر آغاز می‌شود. یک گروه قبل از هر چیز شیفته منطقی هستند، با خواندن آثار آنها شخص دچار این وسوسه می‌شود که آنها، به پیروی از روش ووبان^{۸،۹}، که استحکامات خود را در اطراف محل محاصره‌گسترش می‌دهد و جایی را برای بخت و اقبال باقی نمی‌گذارد، قدم به قدم پیش رفته‌اند. گروه دیگر با شهود هدایت می‌شوند و مانند سواره نظام جسور خط مقدم، در حمله اول به پیروزی‌های برق‌آسا، اما گاهی متزلزل دست می‌یابند [۱].

هرش^{۱۰}، یک ریاضیدان آمریکایی است که به خاطر نوشته‌هایش درباره ماهیت، کنش و تأثیر اجتماعی ریاضیات معروف است. کتاب «تجربه ریاضی» که وی یکی از نویسندگان آن است، جایزه ملی کتاب علوم را از آن خود کرده است. او می‌گوید: «اگر کنش ریاضیات را نظاره کنیم، شهود را همه جا حاضر می‌یابیم» [۵].

برتون^{۱۱}، استاد فقید آموزش ریاضی دانشگاه بیرمنگام^{۱۲} که به انجام پژوهشی میدانی از یک اجتماع هفتاد نفری از ریاضیدانان، درباره شهود ریاضی پرداخته است می‌نویسد: «طبق پژوهش‌های خود دریافته‌ام که بسیاری از ریاضیدانان که در پژوهش من شرکت داشتند، در این باره با هرش موافق‌اند». برای مثال:

«همیشه باید از شهود استفاده کرد»،

«من فکر نمی‌کنم بتوان چیزی را بدون شهود آغاز کرد».

البته موضع همه در این مورد یکسان نبود. یک زن ریاضیدان گفت:

«من فکر نمی‌کنم شهود نقشی داشته باشد».

و یک مرد ریاضیدان تأیید کرد:

«من فکر می‌کنم شهود نوعی واژه است که بارگزاری می‌شود، مانند مُد برای مردم تازه است، آن را طرد می‌کنند یا از آن استقبال می‌کنند» [۲]. آنگاه برتون، تناقضات مشابهی را از سوی فیشبین^{۱۳} نویسنده کتاب «شهود در علوم و ریاضیات» که به خاطر مشارکت خلاق، نافذ و منسجم خود درباره آگاهی و درک نقش شهود در آموختن و آموزش ریاضیات مشهور است، اضافه می‌کند: «پوانکاره اعتقاد داشت که هیچ فعالیت خلاق واقعی در علوم و ریاضیات بدون شهود رخ نمی‌نماید [۳]، اما در باور هان^{۱۴}، شهود اساساً منبع ادراک نادرست است و باید از یک تلاش علمی جدی حذف شود» [۴]. برتون

^۹ ارتشید ارتش فرانسه

^۱ G. W. Leibniz ^۲ K. Wierstrass ^۳ Ferrol ^۴ J. Mobius ^۵ J. Hadamard ^۶ H. Poincaré ^۷ F. Klein ^۸ M. Vauban ^{۱۰} R. Hersh

^{۱۱} L. Burton ^{۱۲} Birmingham ^{۱۳} E. Fishbein ^{۱۴} H. Hahn

ادامه می‌دهد: برخی از ریاضیدانان، نگران معنای کلمه هستند نه لزوماً خود پدیده، «من فکر نمی‌کنم بتوان آن را شهود نامید»، و بقیه نیز با عکس‌العمل‌های بالقوه بر حسب جنس خود، شهود را به چیزی عرفانی ارتباط دادند و از آن به عنوان واژه‌ای نام بردند که استفاده نمی‌کردند.

سپس می‌افزاید: از جمع ریاضیدانان شرکت‌کننده خواستم تا به انتخاب خود درباره کار بر روی یک مسئله ریاضی ویژه، با من گفتگو کنند که در کجا و در چه زمانی و چگونه وقتی که پشت میز کار خود نبودند درباره آن فکر کردند، چگونه پی بردند که به نکته مهمی دست یافتند، (اغلب) اشتباه کردند یا نه.

او می‌گوید: اگر در این بخش از گفتگو اشاره صریحی به شهود یا بینش یا به طور ضمنی به چیزی که با این توضیحات سازگار باشد نشد به این دلیل بود که شرکت‌کننده، قضاوتی درباره شهود نداشته باشد تا بتوانم دلیلی بر عدم وجود آن بیابم. اگر اشاره آن‌ها صریح یا توصیفی بود می‌پرسیدم: «آیا آن را شهود می‌نامید؟». کمتر از پنج تن از آن هفتاد ریاضیدان، موضع کاملاً منفی گرفتند و وجود چیزی به نام شهود در ریاضیات را انکار کردند، دشوار است که درباره تعداد، دقیق باشم زیرا ماهیت گفتگوها اکتشافی بود. با این حال، این امکان نیز وجود داشت که فردی که ارتباط شهود و ریاضیات را انکار می‌کرد چیزی را به رسمیت می‌شناخت که دیگران از آن به عنوان بینش یاد می‌کردند و برای او نمود کاملاً متفاوتی داشت، و من نتوانستم در گفتگوهای خود آن را کشف کنم. با این وجود، اکثریت قریب به اتفاق هشتادوسه در صدی، پدیده بسیار مهمی را که ممکن است آن را شهود، بینش، یا در موارد کمتری سرشت عملی آموختن ریاضیات نامید به رسمیت شناختند، اگر چه بسیاری از شرکت‌کنندگان، از یک حس قوی در استفاده از چیزی که «شهود»، «بینش» یا «سرشت» می‌نامیدند برخوردار بودند، اما در مورد این که آیا این واژه‌ها نموده‌های مختلف و متمایزی را نشان می‌دهند و اگر چنین است چگونه باید به رسمیت شناخته شوند توافقی نداشتند. هر توافق در قالب کلماتی چون «ارتباط»، «راه رو به جلو»، «ادراک»، «حسی از امکان یا حتی باور» یافت می‌شد. البته در این مورد که شهود همیشه کافی نیست، توافق وجود داشت و این‌که، تقویت‌کننده احساسی است که شما جهتی را ببینید.

یکی از پاسخ‌دهندگان هشدار داد که: شهود می‌تواند به پیش داوری نزدیک شود که بسیار تیره‌کننده است [۲].

۳. شهود چیست؟

هرش، شهود را «بخش اساسی ریاضیات» می‌نامد و فهرستی از معانی و توضیحات را برای آن بیان می‌کند. از نگاه او، شهود متضاد دقت بسیار، و شهودی چیزی جز «متضاد تحلیلی»، «حسی»، «موجه‌نما یا اقناع در نبود برهان»، «غیر کامل»، و «بر اساس یک الگوی فیزیکی یا برخی نموده‌های ویژه نزدیک به اکتشاف» به شمار نمی‌رود [۵].

استوارت^{۱۵}، نویسنده کتاب «مفاهیم ریاضیات نوین» مانند برخی از ریاضیدانانی که در پژوهش برتون شرکت داشتند، به جای شهود، از سرشت، سخن می‌گوید و با برون‌دادها بیش از سازوکارهای انسانی ارتباط دارد.

«سرشت کارآفرین است که از جهان طبیعی بهره‌برداری می‌کند. سرشت مهندس است که آن را تغییر می‌دهد. سرشت دانشمند است که برای فهم آن تلاش می‌کند و آن چه را که شایسته است به انجام می‌رساند. سرشت ریاضیدان است که فرآیند فهم را با جستجوی تعمیم‌هایی که از بُرش بخش‌های فرعی پدید می‌آیند رقم می‌زند» [۱۱].

وایلدر^{۱۶}، ریاضیدان آمریکایی که در توپولوژی تخصص داشت و به تدریج علائق فلسفی و انسان‌شناختی پیدا کرد با جداسازی «مؤلفه دانش» از «مؤلفه شهودی» در آموزش ریاضیات، برای شهود سه نقش متمایز «در تحول مفاهیم، در پژوهش، و در آموزش» مشخص می‌کند. او می‌نویسد: بدون شهود خلاقیتی در ریاضیات وجود ندارد، [اما] مؤلفه شهودی به دلیل رشد خود، به مؤلفه دانش وابسته است [۱۳].

¹⁵ I. Stewart ¹⁶ R. L. Wilder

جان اشتاینر^{۱۷} که در زمینه‌های زبان‌شناسی، روان‌شناسی و آموزش آثار گوناگونی دارد و با هرش در نوشتن کتاب «عشق و تنقیر ریاضی» همکاری داشته است، استعاره‌ها، شباهت‌ها، و طراح‌ی و توصیف الگوهای جدید را خمیرهٔ بیش می‌داند.

یک ریاضیدان می‌گوید: در رشتهٔ من، بسیاری از جاها، بین حوزه‌های مختلف ریاضیات و نسیت و غیره، شهود وجود دارد، اما در مورد شهود نمی‌توان به وضع یک نظریهٔ پرداخت، باید ارتباط‌ها را با دقت نشان داد [۲]. برتون می‌نویسد: ده تن خارج از جمع هفتاد ریاضیدان، به واژهٔ بیش توجه داشتند، اما نمی‌توانستند بگویند که چیست؟

«بیش، دیدن یک ارتباط است»،

«وقتی که بر مسئله‌ای نظاره می‌کنم، اگر بارقه‌ای زده شود یک بیش دارم»،

«بیش، داشتن احساسی است در مورد این‌که چگونه چیزها به یکدیگر ارتباط دارند، من فکر می‌کنم بدون آن بتوان از عهده برآمد، با دور زدن اکتشاف و آزمون و خطا همان تصویر پدیدار می‌شود، اما تازیانۀ زدن تا مرگ، کار بسیاری می‌طلبد، خیلی بیش از (جستجو در) کوره‌راه‌ها. بنابراین، بیش یک میان‌بر است». برای بقیه، شهود و بیش متفاوت بود:

«شما به گسترش شهود وابسته‌اید- یعنی به آن‌چه که در داشتن یک چشم انداز مختصر از ارتباط بین بیش‌ها دخالت دارد. من واژهٔ شهود را به کار می‌برم. فکر می‌کنم این دو با هم ارتباط دارند. شما همیشه به گونه‌ای غیر مستقیم فکر می‌کنید، با استدلال قیاسی. همواره دنبال اشاره‌ای هستید که چیز جالبی برای انجام دادن باشد یا آن نوع چیزها را بررسی کنید»،

«بیش، نوعی بارقه است، شهود شفافیت کمتری دارد و مشخصاً گسترده‌تر است، زیرا اگر نوع کاذب آن (بیش) را داشته باشید با شهود اصلاح می‌شود» [۲].

خواننده به خوبی می‌داند که تعریف شهود در تمام این موارد مبهم است، از یک کاربری به کاربری دیگر تفاوت می‌کند و هر فرد، یک معنی را اراده می‌نماید. این‌ها نتایج حاصل از اعمال شهود را توصیف می‌کنند و از چپستی، مبداء و منشاء، و میزان اهمیت و اعتبار آن، سخنی به میان نمی‌آورند. از نگاه برتون، آنچه که در این جمله‌ها وجود دارد، در ادبیات یا سخن شرکت‌کنندگان پژوهش او، بین دو مرز تفکر و احساس جای دارد و به صورت ذهنی قابل درک است. در واقع، استفاده از واژهٔ شهود یا بیش، هرچند آزادانه، به عنوان بخشی از راه‌هایی که ریاضیدانان می‌آموزند، می‌تواند با ارائهٔ رویکردی معرفتی در جهت گشودن راهی برای درک آن به چالش کشیده شود. چنین رویکردی به دیدگاهی تاریخی باز می‌گردد که ریاضیات را در جایگاهی از پیش برجسته رانده است. از این نظر، تسری ساختاری که در حیات موجودات زنده وجود دارد و لازمهٔ حفظ و بقای آنها است در گزینش شهود به عنوان عضوی از زوج «ریاضیات و شهود» که ریاضیات نقش نمایان را دارد می‌تواند توصیفی گویا در جهت درک این واژه باشد [۲].

۴. منشاء شهود

نظرات ریاضیدانان و دانشمندان دربارهٔ منشاء و مبنای شهود متفاوت است. هرش می‌نویسد: شهود، ادراک مستقیم یک شیء خارجی نیست، بلکه اثری است که از دست‌یازی اشیاء عینی در فکر و مغز در یک مرحله بعد از گذاشتن نشانه بر کاغذ، یا حتی دیرتر، از دست‌یازی تصاویر ذهنی پدید می‌آید. این آزمایش در فکر و مغز، نشان، و اثر بر جای می‌گذارد. [۵]

برتون در دنبالهٔ گزارش خود از گفتگویی که با جمعی از ریاضیدانان انجام داده است پاره‌ای از نظرات آنان را بیان کرده است. در این نظرسنجی یکی از شرکت‌کنندگان، دلیل خود را در مورد عدم وجود شهود چنین بازگو می‌کند:

¹⁷ V. J. Steiner

«بر پایه آنچه که من می‌دانم و آنچه که پیش از این انجام داده‌ام تقریباً اطمینان دارم که فلان روش در مورد فلان مسئله کار می‌کند. این شهود نیست، زیرا از تجربه می‌آید.»

برتون اضافه می‌کند: ریاضیدانانی که با آنها گفتگو کردم و شهود، بینش یا سرشت را به عنوان یک عامل اصلی در زندگی کاری خود تأیید کردند، زایش آن را با جملات زیر توضیح دادند:

«شهود من بر پایه دانش و تجربه من است. بیشتر آن چه که از شهود دارم، بیشتر بدنه شهود من، احتمالاً همین است.»

«شهود حالتی است از جور کردن تدریجی اجزا با یکدیگر، تا آن را تصدیق کنید. شهود، گام‌های کوتاه در جهات مختلف است. شهود، فزاینده است.»

او در ادامه می‌نویسد: دانش و تجربه دو عامل اصلی بودند که شرکت‌کنندگان در توفیقی که برای دریافت شهود یا بینش یافته بودند به حساب می‌آوردند، هرچند محدود ریاضیدانانی هم بودند که آن را، خواه داشته باشید خواه نه، به عنوان یک تفسیر احتمالی از ژنتیک باور داشتند. برخی از ریاضیدانان زن، شهود را در دیگران ولی نه در خود به رسمیت شناختند. هیچ‌یک از ریاضیدانانی که درباره کار روی شهودشان، به منظور بهبود دفعات تکرار یا اعتبار آن صحبت کردند، و آنهایی که به دانشجویان خود ارجاع می‌دادند، در این مورد لحاظ نشدند. تنها توضیح آنان درباره شهود این بود که محصول آموختن (اعم از دانش و تجربه) است، من به خاطر این فقدان حساسیت برای آنان، و پیشرفت دانشجویان نشان آورده شدم. اگر آشنایی فزاینده با ریاضیات و گسترش دانش همراه با تجربه حل مسئله، اساس شهود ریاضی است که توفیقات پژوهشی به آن وابسته است، چالش آموزشی جدی وجود خواهد داشت. چرا در کلاس‌های معمولی درس، این دو، دانش و تجربه، به صورت جداگانه دیده می‌شوند و به نقش شهود اعتنایی نمی‌شود؟ [۲].

۵. شهود و آموزش ریاضیات

پولیا^{۱۸} با استدلالی محکم نشان می‌دهد که هدف اصلی آموزش ریاضی، یاد دادن شیوه حل مسئله است [۹]. اما این بحث جای خود را دارد که مسئله اساساً به چه چیزی گفته می‌شود. مسئله می‌تواند معنایی چنان گسترده پیدا کند که جای فکر کردن در باره‌اش باقی نماند. مسئله، پرسشی است که برای بررسی یا حل کردن عنوان می‌شود و از این دیدگاه، ریاضیات سراسر مسئله است. گوناگونی و تعدد نتایج شگفت‌انگیز در ریاضیات قرن هیجدهم میلادی، که هر یک را می‌توان نتیجه تلاش و تامل ریاضیدانان در برابر یک پرسش تلقی کرد، از این دیدگاه، محصول نمایشی بارز از فرآیند حل مسئله است. آیا می‌توان با پرورش شهود به آموزش ریاضی و حل مسئله‌های آن پرداخت؟

برتون می‌نویسد: یکی از چیزهایی که من در مورد دانشجویان، به ویژه دوره کارشناسی، دریافته‌ام این است که به نظر می‌رسد شهود بسیار کمی دارند. عادت دارند که کم همت باشند. توانایی نگاه کردن به یک مسئله از زوایای مختلف حیاتی است. آنها تمایل دارند که از یک زاویه به مسئله نگاه کنند و از این طریق نمی‌توان راهی یافت. اگر از زوایای مختلف به مسئله نگاه کنید به گونه‌ای رازآلود چیزی آغاز می‌شود و از این طریق راهی می‌یابید. همه ریاضیدانانی که در مصاحبه من شرکت داشتند، نسبت به دانشجویان و مسئولیتی که در کمک به یادگیری دارند بی‌اعتنا نبودند. به عنوان نمونه، یک زن ریاضیدان در این مورد گفت: دانشجویان دکتری، تجربه عمیق این ارتباط را ندارند. باید با طرح پرسش، آنها را کمک و هدایت کرد. فرآیند را الگوسازی کرد. می‌توان همان گونه که در جهت حل مسئله گام برمی‌داریم آن را توضیح دهیم و آنها را در پیمودن راه هدایت کنیم تا تجربه یافتن پاسخ را بیابند [۲].

جان اشتاینر در این باره می‌نویسد: آموزش راه‌بردهای حل مسئله دقیقاً مانند آموزش روش‌های آزمایشگاهی به دانشمندان جوان در دوره کارآموزی، متنوع است. با این حال، این مورد کمیابی است. در عوض، زنان و مردان، در ابتدا، آنچه را که مداوار^{۱۹} آن را «هنر تحلیل» نامیده است به نمایش می‌گذارند [۶].

¹⁸ G. Polya ¹⁹ R. Medawar

هوارث^{۲۰} در پاسخ به این پرسش که «آیا می‌توان به دانشجویان کمک کرد تا با تکیه بر شهود به عنوان بخشی از آماده‌سازی، فیزیکدان شوند؟»، چنین می‌گوید:

راه حل شهودی مسئله‌ها اساساً مهم است. آن، یافتن جواب مسئله پیش از حل کردن آن است. دانشجویان وسوسه می‌شوند تا باور کنند که شهود فیزیکی چیزی است که شما ممکن است داشته باشید یا نه. قطعاً استعدادها متفاوت است، اما روندی که می‌تواند تشویق شود این است که یکی از چیزهایی است که آموزش درباره آن است. معلمان می‌توانند استعدادها را با مثال و توصیف رویکرد خود در حل مسئله تشویق کنند. آنها همچنین می‌توانند برای کشف روند دانشجو وقت بگذارند [۲].

برتون می‌افزاید: به خاطر دارم که سال‌ها پیش در کلاس درس حل مسائل ریاضی که با سایمستر^{۲۱}، وقتی آشکارا غرق تفکر بودیم، چه اگرهایی به نظر من می‌رسید، آنها برای من مانند افکار مقابله با مشکلاتی احساس می‌شوند که جواب شناخته شده‌ای ندارند. به بیان یکی از شرکت‌کنندگان پژوهش من، ما فرآیند کشف شهود خود را با صدای رسا الگوسازی می‌کردیم نه به این خاطر که حل‌کنندگان بهتر مسئله‌ها باشیم بلکه به این دلیل که بازتابنده بهتری درباره فرآیند و در نتیجه، شاید یادگیرندگان و معلمان باشیم. ما ویژگی‌هایی را که در بالا توسط ریاضیدانان طراحی و برجسته شد به منظور تأکید بر این که تولید ریاضیات در هر سطح به آموزش از طریق بحث و توجیه، گسترش حالتی از امکان یا احتمال برقراری ارتباط، و ادراک از طریق دانش و تجربه وابسته است، ترسیم می‌کردیم [۲]. به بیان اسمیت^{۲۲} و هانوی^{۲۳}: «اگر چرخه حدس زدن و نتیجه‌گیری از مباحثه و توجیه، برای دانشجویان قابل رؤیت نیست آنها فقط با ریاضیات عمومی رها شوند، تا گزاره‌هایی را که به دقت تنظیم شده‌اند و استدلال‌های شسته رفته متن را ببینند» [۱۰].

مکمن^{۲۴} می‌پرسد: چرا استفاده از شهود یا استدلال استقرایی، آن‌چنان ناخوشایند است؟ عملاً بدون آنها کلاً ریاضیاتی وجود ندارد، زیرا تا چند قرن اخیر ریاضیات تقریباً تنها به کمک شهود، مشاهدات استقرایی و طرحی از استدلال برای القای باور، پیشرفت کرده بود نه با استدلال‌های متقن و البته نه با برهان‌هایی که مجلات علمی امروزی طلب می‌کنند [۸].

برتون می‌نویسد: ریاضیدان‌های پژوهشی، جهت‌های روشنی در آموزش ریاضی ارائه داده‌اند که تمرین آن‌ها برای یادگیرندگان، مانند آنچه برای خود آنها است می‌تواند جذاب، هیجان‌انگیز و با ارزش باشد. این جهت‌ها ابتدا به سوی سنجش و پرورش شهود و همچنین شناخت اهمیت ایجاد ارتباط و اتصال در ساختمان مفهوم ریاضی بودند. فارغ از این باور که شما، به سادگی انجام دهید یا نه، از فرآیند شهود برخوردار هستید. به نظر من برخی از شرکت‌کنندگان، گزارش کردند که آنها آموخته بودند تا در طول زمان، شهود خود را به رسمیت بشناسند و به آن اعتماد کنند. با چنین اعترافی، کیفیت این فرآیند، بهبود یافته بوده است، در غیر این صورت چگونه می‌توان اتکای آنها را بر تجربه و دانش به عنوان منبع آن توضیح داد؟ تجربه و دانش، هر دو آموزش‌پذیر هستند (هر چند، در فرآیند غوطه‌ور اند و بر خوبی ادراک تأثیر دارند). ما می‌توانیم بیاموزیم تا با سخاوت، حساسیت، و تحمل بیشتر، با اهداف دیگر فرآیند یادگیری همراه باشیم. در ریاضیات، تلاش مداومی برای پاک‌کردن مفاهیم درونی و تأثیرگذار به نفع ریاضیاتی که به بیان هرش به خشکی غبار و به هیجان یک دفترچه تلفن است وجود دارد. بحث مشابهی اغلب برای آموزش مبانی ارائه می‌شود. ابتدا این‌که بدون مبانی، یادگیرندگان، تجهیزات لازم را برای راه‌یابی به غیر مبانی در اختیار ندارند. آنانی که از این استدلال بهره‌برداری می‌کنند و آنانی که در هر صورت، اغلب، اولین‌هایی هستند که از دانشجویانی که در یادگیری خود از آنها مردود شده‌اند شکایت دارند، از تعریف مبانی باز می‌مانند. در مقابل، استدلال من این است که دست‌یابی به امکان ساخت استدلال ریاضی، به دانش نیازمند است. اما هدف‌ها، آنهایی هستند که تابع ساخت یک استدلال قانع‌کننده را ارائه کنند و این که انجام آموزش چیزی است که بخش مهم‌تری از آموزش ریاضی است و در هر حال نمی‌تواند در غیاب محتوا انجام شود.

²⁰ J. Howarth ²¹ D. Singmaster ²² J. P. Smith ²³ K. Hungwe ²⁴ J. Mackeman

دو ریاضیدان در مورد بحث بالا چنین گفتند:

«داشتن بینش، داشتن احساس در مورد چگونگی ارتباط اشیاء، به یکدیگر است».

«شما به گسترش بینش‌ها وابسته‌اید، آنچه در آن است داشتن یک دید مختصر است که ارتباط بین بینش‌ها است».

با این حال کسانی که در مورد یادگیری ریاضیات در مدرسه و دانشگاه مطالعه کرده‌اند، دریافته‌اند که متعلمین تمایل دارند تا باور کنند که به‌خاطر سپردن قطعات از تفکر مهم‌تر است. در یک مقاله، بولر^{۲۵}، ویلیام^{۲۶} و براون^{۲۷}، گزارش کرده‌اند که شصت‌وهشت در صد دانشجویان در توان‌ترین کلاس که احتمالاً و امکاناً ریاضیدانان آینده‌اند، حافظه را بر فکر اولویت می‌دهند، یافته بولر^{۲۸} از مطالعه اخیر خود تأیید می‌کند که شصت‌وچهار در صد دانش‌آموزان قوی‌تر، بر این باور بودند که یادآوری، بسیار مهم‌تر از تفکر است. نتایج مشابهی توسط کرافورد^{۲۹} و همکارانش در مورد هشتادودو در صد از فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌ها در استفاده از راه‌برد مولد (یادگیری طوطی‌وار یا با مثال) به دست آمده است. به هر حال آنچه که قابل توجه است آن است که جز در کتاب مهم فیشبین، در ادبیات آموزش ریاضی نشانی از شهود به عنوان موضوعی که در کلاس درس با علاقه بر آن تمرکز شود وجود ندارد. در رده‌بندی وایلد، دانشجویان محصولات نظامی هستند که بیشتر دانش پایه است تا شهودپایه. او به نقل از مویز^{۳۰} ریاضیدان ادامه می‌دهد: «ریاضیات، توانایی تبدیل آموخته‌ها به کنش است، و دانشی که از این طریق به دست می‌آید دارای قدرتی فراتر از همه نسبت‌ها است. اما کنش سبب می‌شود که موقعیت‌های ویژه آموزشی واپایی دانشجوی، پرسش، مباحثه و توجیه، تمام مشارکت‌های لازم باشند، این رویکردهای یادگیری، به نوبه خود، بر حس اجتماعی با انتظارات اکتشاف و خلاقیت در جهت یادگیری منسجم و مرتبط متکی هستند که شهود نقشی مرکزی بر عهده دارد. روشن است که ریاضیدانانی وجود دارند که همراه با بسیاری از مربیان ریاضی، توانایی این الگوی آموزشی را در جایی که آموزش سنتی شکست خورده است، برای دستیابی به رسمیت می‌شناسند. متأسفانه به نظر نمی‌رسد اعتبار آن‌ها تأثیری در آموزش مدرسه و دانشگاه داشته باشد» [۲].

۶. نتیجه‌گیری

وجود شهود توسط ریاضیدانان بسیاری تأیید شده است. با این حال هیچ‌یک از آنان در مورد این که «آیا و چگونه شهود خود را به عنوان بخشی از فرآیند یادگیری پرورش داده‌اند؟» نظری ارائه نداده‌اند. در حالی که بسیاری از آنان، به مرکزیت شهود خود در مورد این که چگونه از طریق پژوهش به دانستن رسیده‌اند اشاره داشته‌اند، تعدادی نیز در توانایی دانشجویان خود و دیگران نیز در توانایی خود در بازی‌گرفتن شهود، بسیار بی‌اعتنا بوده‌اند. مهم‌تر آنکه، برخی شهود را به عنوان چیزی که ممکن است وجود داشته باشد یا نه در نظر گرفته‌اند. در هر حال، به استثنای کار فیشبین، اشاره صریحی در مورد پرورش آگاهانه شهود و بینش، در ادبیات ریاضیات و حتی در فرآیندهای پژوهش محور وجود ندارد و با وجود ادعای مرکزیت آن، در کار با دانشجویان نیز غایب است.

مراجع

[۱] ژ. آدامار، روان‌شناسی ابداع در ریاضیات، ترجمه عباس مخبر، تهران، انتشارات دانا، ۱۳۶۷.

[2] L. Burton, Why is Intuition so Important to Mathematicians but Missing from Mathematics Education?, *For the Learning of Math.*, **19** no. 3 (1999) 27–32.

[3] E. Fischbein, *Intuition in Science and Mathematics: an Educational Approach*, Mathematics Education Library, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.

[4] H. Hahn, The Crisis in Intuition, *The World of Mathematics*, **3** (1956) 1956–1976.

²⁵ J. Boler ²⁶ D. William ²⁷ M. Brown ²⁸ L. Boler ²⁹ K. Crawford ³⁰ E. Moise

- [5] R. Hersh, *What is Mathematics, Really?*, Oxford University Press, New York, 1998.
- [6] V. John-Steiner, *Notebooks of the Mind*, Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [7] I. Lakatos, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge Philosophy Classics. Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
- [8] J. Mackeman, What's the point of proof?, *Mathematics Teaching*, **155** (1996) 14–20.
- [9] G. Polya, *Patterns of Plausible Inferno*, **2**, Princeton University Press, New Jersey, 1998.
- [10] J. P. Smith and K. Hungwe, Conjecture and verification in research and teaching: conversations with young mathematicians, *For the Learning of Math*, **18** no. 3 (1998) 40–46.
- [11] I. Stewart, *Nature's Numbers, The Unreal Reality Of Mathematics*, Basic Books, New York, 1997.
- [12] D. J. Struik, *A Source Book in Mathematics (1200-1800)*, Harvard University Press, New York, Cambridge, Mass, 1969.
- [13] R. L. Wilder, *The role of intuition*, in Campbell, D. M and Higgins J. C (eds), *Mathematics: People, Problems, Results*, **2**, Belmont, CA, Wadsworth International, 1984.

علی پارسیان

تفرش، ابتدای جاده تهران، دانشگاه تفرش، گروه ریاضی

Parsian@Tafreshu.ac.ir

علی پارسیان متولد سال ۱۳۳۸ در شهرستان ساوه است. وی پس از تغییر رشته دانشگاهی خود، در سال ۱۳۵۸ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی دانشگاه تهران، در سال ۱۳۶۵ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی دانشگاه تهران و در سال ۱۳۶۷ وارد مقطع دکتری ریاضی همان دانشگاه شد. وی هم اکنون استادیار دانشگاه تفرش است.

